Séries de Potências

A ideia é generalizar polinómios

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z + \cdots + a_n z^n,$$

a grau infinito

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z + \cdots + a_n z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Definição: Designa-se por **série de potências centrada em** $z_0 \in \mathbb{C}$ e coeficientes $a_n \in \mathbb{C}$ a função dada por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n =$$

$$= a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + a_3(z - z_0)^3 + \cdots + a_n(z - z_0)^n + \cdots$$

com domínio $z \in \mathbb{C}$ para o qual a série converge.

Teorema: Dada uma série de potências centrada em $z_0 \in \mathbb{C}$ e coeficientes $a_n \in \mathbb{C}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n =$$
$$= a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots + a_n(z - z_0)^n + \cdots$$

existe um $0 \leq R \leq \infty$, denominado **raio de convergência** tal que a série converge absolutamente para $|z - z_0| < R$ e diverge para $|z - z_0| > R$ (para $|z - z_0| = R$ a convergência ou divergência depende da série específica).

Quando existem os limites, o raio de convergência pode ser obtido pela fórmula

$$R = \lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Geralmente, mesmo quando estes limites não existem, o raio de convergência pode sempre ser dado por

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Exemplos:

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots \qquad R = \infty$

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n = 1 + z + 2! z^2 + 3! z^3 + \cdots \qquad R = 0$

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{5^n} = 1 + \frac{z}{5} + \frac{z^2}{5^2} + \frac{z^3}{5^3} + \cdots \qquad R = 5$

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(5 + (-1)^n)^n} = 1 + \frac{z}{4} + \frac{z^2}{6^2} + \frac{z^3}{4^3} + \cdots \qquad R = 4$

Convergência Uniforme de Sucessões e Séries de Funções

Definição: Diz-se que uma sucessão de funções

$$f_1(z), f_2(z), f_3(z), \ldots \ldots$$

converge pontualmente para $f(z)$ se, para cada z fixo, a sucessão de números $\{f_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $f(z)$, ou seja, se $\lim f_n(z) = f(z)$ para cada z fixo.
Diz-se que a sucessão de funções **converge uniformemente** para $f(z)$ num domínio D se a convergência é uniforme para todos os $z \in D$, ou seja, se

$$\forall_{\delta>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}} : n > N, z \in D \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \delta.$$

Diz-se que uma série de funções converge pontualmente se a sucessão das suas somas parciais converge pontualmente, e analogamente para o caso uniforme.

Teorema (Critério de Weirstrass): Se, para todos $z \in D$ se tem

$$|f_n(z)| \leq M_n,$$

e a série $\sum_n^\infty M_n$ converge, então a série de funções $\sum_n^\infty f_n(z)$ converge absolutamente e uniformemente para $z \in D$.

Teorema: Limites uniformes de sucessões de funções contínuas são contínuos. E limites uniformes de funções holomorfas são holomorfos, sendo a derivada igual ao limite das derivadas.

Corolário: Dada uma série de potências centrada em $z_0 \in \mathbb{C}$ e coeficientes $a_n \in \mathbb{C}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n =$$
$$= a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots + a_n(z - z_0)^n + \cdots$$

ela converge uniformemente dentro de bolas fechadas contidas no raio de convergência. Portanto, define uma função holomorfa e tem-se

$$\frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d}{dz}(z - z_0)^n$$
$$= a_1 + 2a_2(z - z_0) + \cdots + n a_n (z - z_0)^{n-1} + \cdots$$

Proposição: Seja uma função f dada pela soma de uma série de potências centrada em $z_0 \in \mathbb{C}$ e coeficientes $a_n \in \mathbb{C}$, numa bola de raio $R > 0$ centrada em z_0

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n =$$
$$= a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots + a_n(z - z_0)^n + \cdots$$

Então, necessariamente, f é holomorfa nessa bola e tem-se

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

A representação em séries de potências é por isso única.

Definição: Dada uma função f holomorfa em z_0 chama-se **série de Taylor** de f centrada em z_0 à série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.$$

Chama-se também **série de MacLaurin** ao caso particular da série de Taylor centrada na origem, ou seja, com $z_0 = 0$.

Definição: Diz-se que uma função é analítica num ponto interior ao seu domínio se ela é infinitamente diferenciável e coincide com a correspondente série de Taylor numa vizinhança centrada nesse ponto.

Teorema (Taylor): Se $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é holomorfa num ponto (interior) $z_0 \in D_f$ então f é analítica nesse ponto. Ou seja, f é igual à sua série de Taylor em torno desse ponto

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n, \end{aligned}$$

com a igualdade válida (pelo menos) na maior bola centrada em z_0 e contida no domínio de holomorfia de f.

Exemplos:

- $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots \qquad z \in \mathbb{C}$
- $\cos z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots \qquad z \in \mathbb{C}$
- $\operatorname{sen} z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots \qquad z \in \mathbb{C}$
- $\displaystyle\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots \qquad |z| < 1$